39

Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Rechtseinselementes in einem Ring

Von F. SZÁSZ (Budapest)

Ein Problem von T. SZELE lösend haben wir früher bewiesen, daß sich jeder (rechtsseitig) Artinsche Ring A in eine ringdirekte Summe $A = P \oplus T$ zerlegen läßt, wobei P ein periodischer Artinscher Ring und T ein torsionsfreier Artinscher Ring ist (s. Verfasser [7]). Beim Beweis dieses Satzes wurden Everettsche Ringerweiterungen und die Tatsache benützt, daß jeder torsionsfreie Artinsche Ring ein Rechtseinselement besitzt. Es wird bezüglich eines Beweises ohne die Everettsche Ringerweiterungstheorie eines etwas allgemeineren Zerlegungsatzes auf die Note [5] von A. KERTÉSZ, bezüglich der Existenz eines Rechtseinselementes in einem torsionsfreien Artinschen Ring auch auf HERSTEIN [2], HOPKINS [3] (insbesondere Teil 6. 2) und MICHLER [6], weiterhin bezüglich der Existenz des Einselementes in einem beliebigen (assoziativen) Ring auf BAER [1] und Verfasser [8] verwiesen.

Das Ziel dieser Note ist nun eine hinreichende Bedingung für die Existenz Eines Rechtseinselementes in einem Ring anzugeben, woraus wiederum auch die Tatsache folgt, daß jeder torsionsfreie Artinsche Ring ein Rechtseinselement besitzt. Es gilt nämlich, als eine Verallgemeinerung einer Behauptung von CH. HOPKINS, der folgende

Satz. *Ist A ein assoziativer Ring mit dem Jacobsonschen Radikal J, der die folgenden Eigenschaften besitzt:*

a) *A/J hat ein zweiseitiges Einselement;*

b) *J ist nilpotent;*

c) *es gilt die Minimalbedingung für die nilpotenten Rechtsideale von A;*

so gibt es in A Linksideale L_1 und L_2 mit $A = L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2 = 0$, wobei L_1 ein Ring mit einem Rechtseinselement und L_2 ein nilpotenter Artinscher Ring ist.

Folgerung 1. Ist A ein Ring mit den Eigenschaften a), b) und c), der kein nilpotentes Artinsches Linksideal enthält, so hat A ein Rechtseinselement.

Folgerung 2. Ist A ein torsionsfreier Artinscher Ring, so hat A ein Rechtseinselement.

BEWEIS. Da nach Szele [10] jeder nilpotente Artinsche Ring eine periodische additive Gruppe besitzt, und da offenbar jeder Artinsche Ring die Eigenschaften a), b) und c) hat, ergibt sich Folgerung 2. aus Folgerung 1. und freilich auch Folgerung 1. aus dem Satz. Hiernach genügt es den Satz zu beweisen. Es sei also A ein (assoziativer) Ring mit den Eigenschaften a), b) und c). Da der Faktorring A/J nach dem Jacobsonschen Radikal J wegen a) ein zweiseitiges Einselement $f+J$ hat, und da J wegen b) nilpotent ist, gibt es ein idempotentes Element $e \in A$ mit

$e+J=f+J$ und $A(1-e) \subseteqq J$, $(1-e)A \subseteqq J$ (vgl. z. B. JACOBSON [4], S. 54). Dann erhält man mit den Bezeichnungen $L_1 = Ae$ und $L_2 = A(1-e) = \{x - xe;\ x \in A\}$ gewiß $A = L_1 + L_2$ mit $L_1 \cap L_2 = 0$, wobei L_1 und L_2 Linksideale von A sind, und L_1 ein Rechtseinselement e besitzt. Es soll bewiesen werden, dass L_2 ein nilpotenter Artinscher Ring ist. Es gilt $L_2 \subseteqq J$ und wegen b) ist L_2 gewiß nilpotent. Wir werden zeigen, daß L_2 ein (rechtsseitig und linksseitig) Artinscher Ring ist. Nach Szele [10] genügt es zu zeigen, daß L_2 rechtsseitig Artinsch ist. Nehmen wir an, daß eine unendliche absteigende Kette $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots$ von Rechtsidealen des nilpotenten Ringes L_2 existiert. Dann ist $K_i = R_i + R_i A$ für jedes i ein Rechtsideal des Ringes A, und wegen $K_i \subseteqq J$ und wegen b) und c) gibt es dann ein i_0, derart, daß $K_{i_0} = K_{i_0+1} = K_{i_0+2} = \dots$ gilt. Es seien $J^j = 0$, $J^{j-1} \neq 0$ und $M_0 = 0$; $M_n = \{x;\ x \in A,\ xJ^n = 0\}$. Dann ist M_n ein zweiseitiges Ideal von A, und man erhält $A = M_j \supseteqq M_{j-1} \supseteqq M_{j-2} \supseteqq \dots \supseteqq M_1 \supseteqq M_0 = 0$ und $M_n J \subseteqq M_{n-1}$. Setzen wir voraus, daß $K_{i_0} \subseteqq M_m$ und $K_{i_0} \not\subseteqq M_{m-1}$ gelten. Dann ergibt sich wegen $R_{i_0} \subseteqq L_2 = A(1-e) \subseteqq J$, $R_{i_0} \subseteqq M_m$ und $M_m J \subseteqq M_{m-1}$ gewiss $R_{i_0} A = R_{i_0}(1-e)A \subseteqq M_m J \subseteqq M_{m-1}$ und demnach $R_{i_0} + M_{m-1} = R_{i_0+1} + M_{m-1} = R_{i_0+2} + M_{i_0-1} = \dots$. Da der Rechtsidealverband von A modular ist, soll die echt absteigende Kette der Durchschnitte

$$R_{i_0} \cap M_{m-1} \supset R_{i_0+1} \cap M_{m-1} \supset R_{i_0+2} \cap M_{m-1} \supset \dots$$

unendlich sein. (vgl. [9], Satz 22, S. 100). Gibt es also in M_m eine unendliche echt absteigende Kette der Rechtsideale des Ringes L_2, so existiert schon in M_{m-1} eine solche Kette. Nach endlich vielen ähnlichen Schritten erhält man in M_1 die Existenz einer unendlichen echt absteigenden Kette von Rechtsidealen des Ringes L_2. Wegen $(M_1 \cap L_2)A = (M_1 \cap L_2)(1-e)A \subseteqq M_1(1-e)A \subseteqq M_1 J = 0$ ergibt sich, daß jedes in M_1 liegende Rechtsideal R des Ringes L_2 auch ein Rechtsideal des Ringes A ist, und wegen c) folgt, dass L_2 ein Artinscher nilpotenter Ring sein muss.

Bemerkung. Es wäre interessant ein Analogon des obigen Satzes zu untersuchen, wenn man in der Bedingung a) statt der Existenz des Einselementes von A/J die Existenz eines Rechtseinselementes von A/J voraussetzt. Dann folgt aber i. a. $R_{i_0} A \subseteqq M_{m-1}$ nicht notwendig aus der Voraussetzung $R_{i_0} \subseteqq M_m$.

Literaturverzeichnis

[1] R. BAER, Kriterien für die Existenz eines Einselementes in Ringen, *Math. Z.* **56** (1952), 1—17.
[2] I. N. HERSTEIN, On torsion free Artin rings, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös. Sect. Math.* **7** (1964), 97—98.
[3] Ch. HOPKINS, Rings with minimal conditions for left ideals. *Ann. of Math.* **40** (1939), 712—730
[4] N. JACOBSON, Structure of Rings, *Providence* (1956), *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* **37**.
[5] A. KERTÉSZ, Zur Frage der Spaltbarkeit von Ringen. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astr. Phys.* (1964), 91—93.
[6] G. MICHLER, Kleine Ideale, Radikale und die Eins in Ringen. *Publ. Math. Debrecen* **12** (1962), 231—252.
[7] F. SZÁSZ, Über Artinsche Ringe. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.* **11** (1963), 351—354.
[8] F. SZÁSZ, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **28** (1967), 31—37.
[9] G. SZÁSZ, Einführung in die Verbandstheorie, *Budapest* (1962).
[10] T. SZELE, Nilpotent Artinion rings, Publ. Math. Debrecen **4** (1955) 71—78.

(Eingegangen am 23. Mai 1966.)